4ο διάλεξη
21/03/2019

Άσκηση: Αποδείξτε τη μεταβατική και $\boxed{\text{συμμετρική}}$ ιδιότητα του Θ.

(HW) (2)

Λύση

Ορισμός: Μεταβατική Ιδιότητα

Αν $f(n)=\Theta(g(n))$ και $g(n)=\Theta(h(n))$ τότε $f(n)=\Theta(h(n))$

Συμμετρική Ιδιότητα

$f(n)=\Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n)=\Theta(f(n))$.

πρέπει να τους ξέρω

~~Λύση~~

Απόδειξη μεταβατικής ιδιότητας

Για να ισχύει η $f(n)=\Theta(h(n))$, θα πρέπει 1) $f(n)=O(h(n))$ (1)

2) $f(n)=\Omega(h(n)) \rightarrow$ HW

Αφού $f(n)=\Theta(g(n)) \Rightarrow f(n)=O(g(n)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ c_1 \in \mathbb{R}^+$ και $n_1 \geq 0$: $f(n) \leq c_1 g(n)\ \forall n \geq n_1$ (1)

Αφού $g(n)=\Theta(h(n)) \Rightarrow g(n)=O(h(n)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ c_2 \in \mathbb{R}^+$ και $n_2 \geq 0$: $g(n) \leq c_2 h(n)\ \forall n \geq n_2$ (2)

Επιλέγουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. Επομένως, $f(n) \leq c_1 \cdot g(n) \leq c_1 \cdot c_2 h(n)\ \forall n \geq n_0$

Θέτω $c=c_1 \cdot c_2$ τότε $\exists\ c$ και $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ $f(n) \leq c h(n)\ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow f(n)=O(h(n))$

Άσκηση: Δείξτε ότι $\sqrt{n^5} \cdot \log\sqrt{n^5} = O(n^3)$

Λύση

Αναζητούμε μια σταθερά $c \in \mathbb{R}^+$ και έναν ακέραιο $n_0 \geq 1$ τέτοιο ώστε $\sqrt{n^5} \cdot \log\sqrt{n^5} \leq c \cdot n^3$, $\forall n \geq n_0$

$$\Longleftrightarrow n^{\frac{5}{2}} \cdot \log n^{\frac{5}{2}} \leq c \cdot n^3$$

$$\Longleftrightarrow n^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{5}{2}\log n \leq c \cdot n^3$$

Ισχύει ότι $2{,}5 \cdot n^{\frac{5}{2}} \cdot \log n \leq 2{,}5 \cdot n^{\frac{5}{2}} \cdot \underbrace{\sqrt{n}}_{= n^{\frac{1}{2}}} = 2{,}5 \cdot n^3 \quad \forall n \geq 4$

Επομένως, εάν επιλέξουμε $c = 2{,}5$ και $n_0 = 4$ προκύπτει ότι

$$\sqrt{n^5} \cdot \log\sqrt{n^5} \leq c n^3 \quad \forall n \geq n_0$$

Άρα, $\sqrt{n^5} \cdot \log\sqrt{n^5} = O(n^3)$

Άσκηση: Δείξτε ότι $\log(\sqrt{n}) = O(\log n)$

Αναζητούμε μια σταθερά $c \in \mathbb{R}^+$ και έναν ακέραιο $n_0 \geq 1$ τέτοιο ώστε $\log(\sqrt{n}) \leq c \cdot \log n$

$$\Rightarrow \log n^{\frac{1}{2}} \leq c \log n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log n \leq c \cdot \log n$$

Επομένως, εάν επιλέξουμε $c = \frac{1}{2}$ και $n_0 = 1$ προκύπτει ότι $\log(\sqrt{n}) \leq c \cdot \log(n) \ \forall n \geq n_0$. Άρα, $\log(\sqrt{n}) = O(\log n)$

HW 3

Άσκηση: Δείξτε ότι: $\log(\sqrt{n}) = \Omega(\log(n)) \Rightarrow \log(\sqrt{n}) = \Theta(\log(n))$

Άσκηση: ~~...~~ Βρείτε την τάξη της χρονικής πολυπλοκότητας $T(n)$ του ακόλουθου αλγορίθμου

```
Procedure f(integer n){
    for (i=1; i<n; i++)              ⟶   c1·n
        for (k=n; k≤n+5; k++)        ⟶   c2·6
            x=x+1;                   ⟶   c3·1
```

Άρα, $T(n) = 6n$ και $T(n) = \Theta(n)$

Άσκηση: Αποδείξτε επαγωγικά ότι αν $T(0)=0$ και $T(n) = 2\cdot T(n-1)+1$ τότε $T(n) = 2^n - 1$, $n>0$

Λύση

$n=1$, $T(1) = 2T(1-1)+1 = 1$

$n=1$, $2^1 - 1 = 1$ ισχύει

Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $n-1$ δηλαδή υποθέτουμε ~~ότι~~ πως ισχύει ότι $T(n-1) = 2^{n-1} - 1$

Θα δείξουμε πως ισχύει και για την τιμή n.

$T(n) = 2T(n-1)+1 = 2(2^{n-1}-1)+1 = 2^n - 2 + 1 = 2^n - 1$

HW ④

Άσκηση: Θεωρήστε τη συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που ορίζεται ως εξής

$f(0)=1$

$f(1)=2$

$\vdots$

$f(n)=4 \cdot f(n-2)+2$, αν $n>1$

Αποδείξτε επαγωγικά ότι $\forall$ ακέραιο $n \geq 3$ ισχύει ότι

$f(n) \leq 3 \cdot n \cdot 2^{n-2}$.

HW ⑤

Άσκηση: Να δοθεί ο καλύτερος "O" συμβολισμός για τις ακόλουθες εκφράσεις

α) $2\log n - 4n + 3n\log n$

β) $2+4+\dots+2n$

γ) $\dfrac{(n^2+\log n)(n-1)}{n+n^2}$

δ) $2+4+8+\dots+2^n$

HW ⑥

(Παλιό Θέμα)

Άσκηση: Διατάξτε τις παρακάτω συναρτήσεις έτσι ώστε $\forall$ ζεύγος συναρτήσεων $f(n), g(n)$ αν η $f(n)$ προηγείται της $g(n)$ στη διάταξη να ισχύει $f(n) \leq O(g(n))$

$\log^n n$, $n^{\log n}$, 3^n, 2^n, $\log(n!)$, $2^{n+\log n}$, $n\log n$

HW ⑦

Άσκηση: Να δειχθεί ότι $\log^k n \in O(n)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Την Πέμπτη 28/03 <u>δεν</u> θα πραγματοποιηθεί η διάλεξη.